

## EXERCICE N1

I. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x-1}$ .

$$1. x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3 \geq 0 \text{ toujours vrai} \\ \text{et} \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[.$$

$$2. \text{ Soit } x \neq 1, \text{ on a : } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x^2+3} - 2)(\sqrt{x^2+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3} + 2)} = \frac{x^2+3-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3} + 2)} \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3} + 2)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3} + 2)} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3} + 2}.$$

\* Montrons que  $f$  est majorée par 1.

$$x^2 < x^2 + 3 \Rightarrow |x| < \sqrt{x^2 + 3} \text{ et puisque } x \leq |x| \Rightarrow x < \sqrt{x^2 + 3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

De plus on a :  $1 < 2$ , en additionnant membre à membre les deux inégalités, on aura :

$$x+1 < \sqrt{x^2+3} + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3} + 2} < 1.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} f = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3} + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow f \text{ est prolongeable par continuité en } 1 \text{ et on a : } F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases} \text{ est le}$$

prolongement par continuité de  $f$  en 1.



في دارك... انتهمون على قرابتة اصغارك

II. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{2-x} & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \\ x^3 + x - \frac{3}{2} & \text{si } x \in [0, 1] \\ \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x-1} & \text{si } x \in ]1, +\infty[ \end{cases}$ .

1. \* Continuité de  $g$  en 0 :  $g(0) = 0^3 + 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x-1}{2-x} = -\frac{1}{2} \neq g(0) \Rightarrow g \text{ est discontinue à gauche en } 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 + x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} = g(0) \Rightarrow g \text{ est continue à droite en } 0.$$

Ainsi  $g$  n'est pas continue en 0.

\* Continuité de  $g$  en 1 :  $g(1) = 1^3 + 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 + x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = g(1) \Rightarrow g \text{ est continue à gauche en } 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2} = g(1) \Rightarrow g \text{ est continue à droite en } 1.$$

Ainsi  $g$  est continue en 1.

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x-1} \left( \frac{+\infty}{+\infty} \right)$  : Forme indéterminée.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)} - 2}{x \left( 1 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{\left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)} - 2}{x \left( 1 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( \sqrt{\left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)} - \frac{2}{x} \right)}{x \left( 1 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \sqrt{\left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)} - \frac{2}{x} \right)}{\left( 1 - \frac{1}{x} \right)} = 1.$$

$\Rightarrow (C_g)$  admet au voisinage de  $+\infty$ , une asymptote horizontale d'équation  $y = 1$ .

3. a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x} = -2 \Rightarrow \Delta : y = -2$  est une asymptote à  $(C_g)$  au voisinage de  $-\infty$ .

b) Soit  $x \in ]-\infty, 0[$ , on a :  $\frac{2x-1}{2-x} - (-2) = \frac{2x-1+4-2x}{2-x} = \frac{3}{2-x} > 0, \forall x \in ]-\infty, 0[$

$\Rightarrow (C_g)$  est située au dessus de  $\Delta$  sur  $]-\infty, 0[$ .



في دارك... إتهون على قرابتة إصغارك

$$4. g(x) = x^3 + x - \frac{3}{2}, \forall x \in [0, 1].$$

\*  $g$  est la restriction d'une fonction polynôme continue sur  $\mathbb{R}$ , en particulier sur  $[0, 1]$ .

$$* g(0) = -\frac{3}{2} < 0.$$

$$* g(1) = \frac{1}{2} > 0.$$

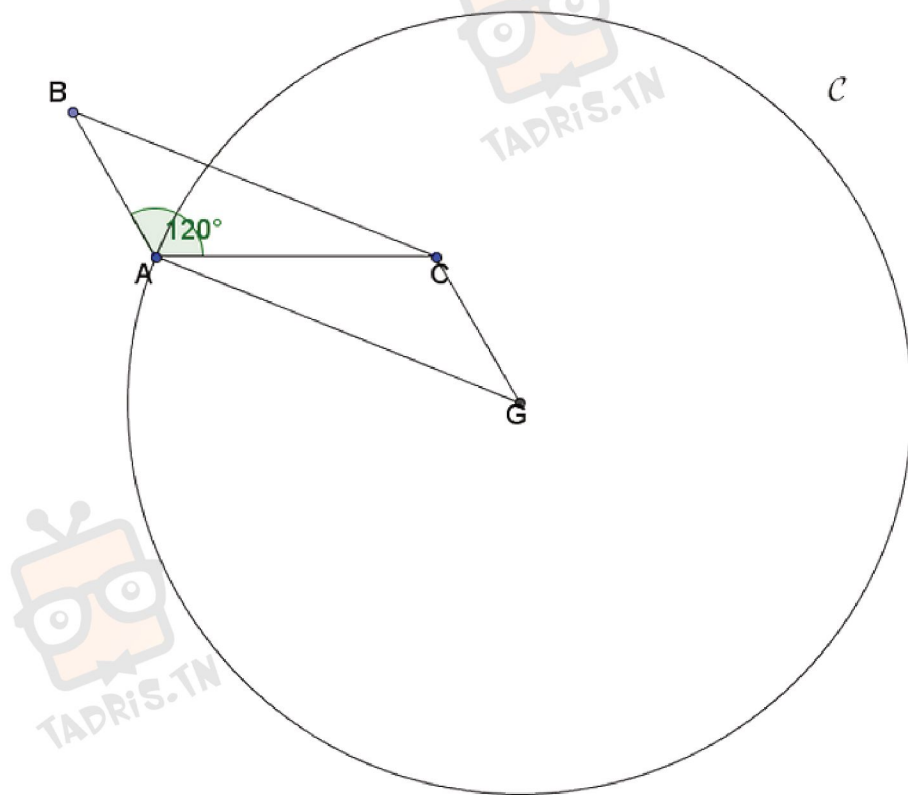
$\Rightarrow$  il existe au moins un réel  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que :  $g(\alpha) = 0$ .

$$5. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x + 2 = 4.$$

### EXERCICE N2

Soit ABC un triangle tel que :  $AB = 3$ ,  $AC = 5$  et  $\hat{A} = \frac{2\pi}{3}$ .

1.



$$2. \overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{BAC} = 3 \times 5 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{15}{2}.$$

D'après la formule d'ELKASHY appliqué dans le triangle ABC, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 9 + 25 + 15 = 49 \Rightarrow BC = 7.$$

$$3. \overline{BA} \cdot \overline{BC} = \overline{BA} \cdot (\overline{BA} + \overline{AC}) = \overline{BA} \cdot \overline{BA} + \overline{BA} \cdot \overline{AC} = BA^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 9 + \frac{15}{2} = \frac{33}{2}.$$



في دارك... إتهون على قرابتة إصغارك

4. a) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 1) ; (B, -1) et (C, 1).

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow ABCG \text{ est un parallélogramme.}$$

b)  $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$  car ABCG est un parallélogramme.

$$\|\overrightarrow{BG}\|^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 9 + 49 + 33 = 91 \Rightarrow BG = \sqrt{91}.$$

$$c) MA^2 - MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 =$$

$$MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\underbrace{\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}) + GA^2 - GB^2 + GC^2. \text{ or } GA = BC = 7, BG = \sqrt{91} \text{ et } GC = AB = 3$$

$$\Rightarrow MA^2 - MB^2 + MC^2 = MG^2 - 33.$$

$$d) M \in \zeta \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 + MC^2 = 16 \Leftrightarrow MG^2 - 33 = 16 \Leftrightarrow MG^2 = 49 \Leftrightarrow GM = 7$$

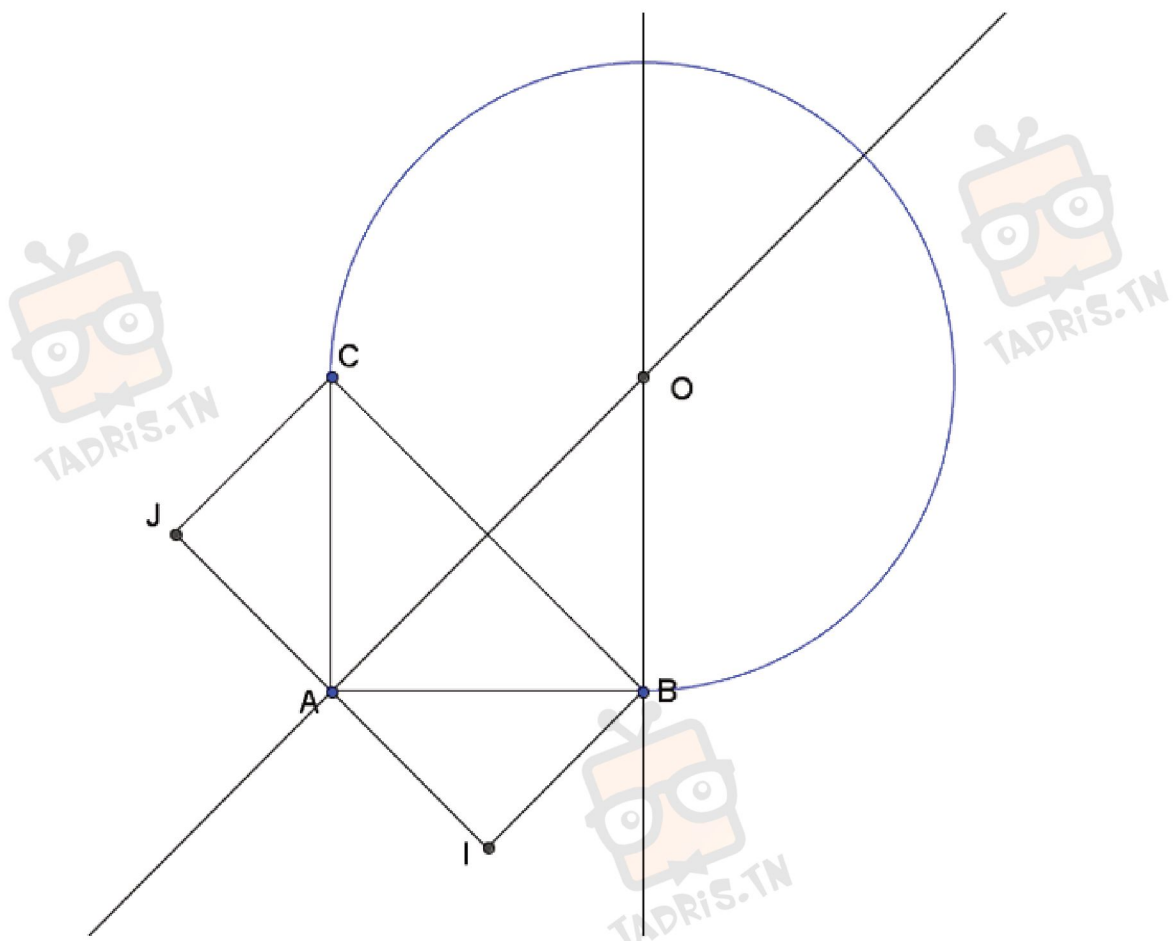
$$\Leftrightarrow M \in \zeta \text{ le cercle de centre G et de rayon 7.}$$

### EXERCICE N3

1. ABC est un triangle isocèle et rectangle en A  $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$ , or  $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$  est orienté dans le

sens indirect ou négatif  $\Rightarrow (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ .

$-\frac{\pi}{4} \in ]-\pi, \pi] \Rightarrow -\frac{\pi}{4}$  est la mesure principale de  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$ .



في دارك... انتهمون علمي قرابتة اصغارك



2. a)  $(\overline{AI}, \overline{AJ}) \equiv (\overline{AI}, \overline{AB}) + (\overline{AB}, \overline{AC}) + (\overline{AC}, \overline{AJ}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \equiv \pi [2\pi] \Rightarrow I, A \text{ et } J \text{ sont alignés.}$

b)  $(\overline{IJ}, \overline{CB}) \equiv (\overline{IA}, \overline{CB}) [2\pi]$  car  $\overline{IJ}$  et  $\overline{IA}$  sont colinéaires de même sens.

$$\equiv (\overline{IA}, \overline{IB}) + (\overline{IB}, \overline{CB}) [2\pi] \equiv (\overline{IA}, \overline{IB}) + (\overline{BI}, \overline{BC}) [2\pi] \equiv -\pi [2\pi] \Rightarrow \overline{IJ} \text{ et } \overline{CB} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Rightarrow (IJ) \parallel (BC).$$

c)  $\left. \begin{array}{l} (IB) \perp (IJ) \\ (JC) \perp (IJ) \end{array} \right\} \Rightarrow (IB) \parallel (JC)$ , de plus on a :  $(IJ) \parallel (BC)$  alors IBCJ est un parallélogramme.

Or  $(IB) \perp (IJ)$  donc IBCJ est un rectangle.

3.  $M \in \xi \Leftrightarrow (\overline{MB}, \overline{MC}) \equiv \frac{111\pi}{4} [2\pi]$

$$\frac{111\pi}{4} = 28\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{111\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ et par suite on a : } M \in \xi \Leftrightarrow (\overline{MB}, \overline{MC}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi].$$

Ainsi  $M \in \xi$  l'arc du cercle  $\zeta$  passant par B et C, tangent à la demi-droite [Bt) telle que

$$(\overline{Bt}, \overline{BC}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi].$$

Cet arc ne contient pas les points B et C et il est situé dans le demi plan de frontière (BC) ne contenant pas [Bt).



في دارك... إتهون على قرابتة إصغارك

